平成 28 年度　エネルギー変換　学期末試験問題

関数電卓のみ、持込可。その他は持込不可。

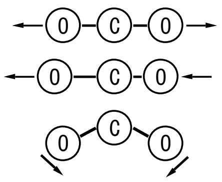
1. 原子力発電において、不測の事態により原子炉が緊急に運転停止し<u>**ウランの核分裂が止まった**</u>後も、原子炉の冷却機構がしばらく動いている必要がある。その理由を説明しなさい。また、全ての冷却機構が失われた場合には、最終的にどのような深刻な事故が想定されるだろうか。以上について 200 字程度で述べなさい。

2. 二酸化炭素, CO_2,には、以下に示すような 3 つの振動モードがある。

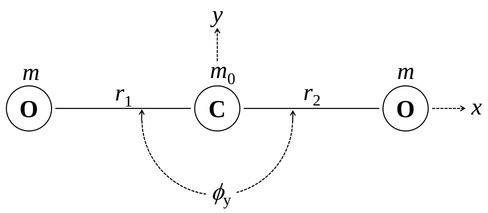
全対称伸縮振動, ν_1

逆対称伸縮振動, ν_2

変角振動, ν_3



二酸化炭素, CO_2, の分子内座標を下図に示す。



振動の運動エネルギー T_{v}, 位置エネルギー V は以下のように与えられる。

$$T_{\mathrm{v}} = \frac{1}{2}m\left(\frac{\Delta\dot{r}_1+\Delta\dot{r}_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\Delta\dot{r}_1-\Delta\dot{r}_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\mu}{2}\left[\left(r_0\Delta\dot{\phi}_{\mathrm{y}}\right)^2+\left(r_0\Delta\dot{\phi}_{\mathrm{z}}\right)^2\right]$$

$$V = \frac{1}{2}(K+k)\left(\frac{\Delta r_1+\Delta r_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}(K-k)\left(\frac{\Delta r_1-\Delta r_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}H\left[\left(r_0\Delta\phi_{\mathrm{y}}\right)^2+\left(r_0\Delta\phi_{\mathrm{z}}\right)^2\right] \qquad \text{-（1）}$$

ここで、酸素原子の質量を m、炭素原子の質量を m_0 とする。K は結合伸縮に関するバネ定数、H は結合角 φ の変化に関するバネ定数、 k は２つの結合の間の相互作用を表す定数である。
また、換算質量 μ は以下のように与えられる。

$$\frac{1}{\mu} = \frac{2}{m_0} + \frac{1}{m} \qquad \text{-（2）}$$

問1.　Lagrange の運動方程式は以下のように与えられる。

$$L = T - V$$
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{S}}\right] - \frac{\partial L}{\partial S} = 0 \qquad \text{-（3）}$$

これを用いて、各振動モードの振動数が、下式で与えられることを示しなさい。

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K+k}{m}}$$
$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K-k}{\mu}} \qquad -(4)$$
$$\nu_3 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2H}{\mu}}$$

問2.　各振動モードの振動数を以下に示す。

$\nu_1 = 4.01\times10^{13}\ (\mathrm{S}^{-1})$, $\nu_2 = 7.05\times10^{13}\ (\mathrm{S}^{-1})$, $\nu_3 = 2.00\times10^{13}\ (\mathrm{S}^{-1})$

また、酸素原子の質量 m と炭素原子の質量 m_0 は以下のとおりである。

$m = 2.66\times10^{-26}$ (kg), $m_0 = 1.99\times10^{-26}$ (kg)

バネ定数, K, k, H を計算しなさい。ただし、単位は $\mathrm{kgs^{-2}}$ で算出すること。

3.　プランクの分布関数について以下の問いに答えなさい。

空間の角振動数 ω を持つ振動モードは、エネルギー量子 $\hbar\omega$ を単位として励起される。

モードに s 個の量子を持つエネルギー状態 ε_s は

$$\varepsilon_S = \mathrm{s}\hbar\omega \qquad -(5)$$

である。これは、空洞内のいたるところに分布する量子化された調和振動子のエネルギーに等しい。

このとき、分配関数, $\mathrm{Z}(\tau) = \sum_{s=0}^{\infty}\exp(-\varepsilon_\mathrm{S}/\tau)$, （$\tau = k_\mathrm{B}T$）は

$$\mathrm{Z}(\tau) = \sum_{s=0}^{\infty}\exp(-\mathrm{s}\hbar\omega/\tau) \qquad -(6)$$

と与えられる。

問1.　分配関数, $\mathrm{Z}(\tau)$, が

$$Z(\tau) = \frac{1}{1-\exp(-\hbar\omega/\tau)} \qquad -(7)$$

となることを示しなさい。

系がエネルギー量子 $\mathrm{s}\hbar\omega$ を持つ状態 s にある確率 P(s)は、ボルツマン因子, $P(\varepsilon_\mathrm{S}) = \dfrac{\exp(-\varepsilon_\mathrm{S}/\tau)}{Z(\tau)}$, より

$$P(\mathrm{s}) = \frac{\exp(-\mathrm{s}\hbar\omega/\tau)}{Z(\tau)} \qquad -(8)$$

である。これより、s の熱平均値は

$$\langle \mathrm{s}\rangle = \sum_{s=0}^{\infty}\mathrm{s}\times P(\mathrm{s}) = \frac{\sum_{s=0}^{\infty}\mathrm{s}\times\exp(-\mathrm{s}\hbar\omega/\tau)}{Z(\tau)} \qquad -(9)$$

である。

問2.　(7)式と(9)式からプランク分布関数

$$\langle s\rangle = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/\tau)-1} \qquad -(10)$$

を導きなさい。