2.5 太陽放射と地球放射 ・「キッテル熱物理学」 P71
4章

2.5.1. プランク分布関数 $(\omega = 2\pi\nu)$

空間の角振動数ωを持つ振動モードは
エネルギー量子$\hbar\omega$を単位として励起される。
モードにs個の量子をもつエネルギー状態ε_sは

$$\varepsilon_s = s\hbar\omega \qquad -(1)$$

これは空洞内のいたるところに分布する量子化された調和振動子のエネルギーに等しい。
このとき、分配関数 $Z(\tau) = \sum_s \exp(-\varepsilon_s/\tau)$ $(\tau = k_B T)$ は

$$Z = \sum_{s=0}^{\infty} \exp(-s\hbar\omega/\tau) \qquad -(2)$$

$x = \exp(-\hbar\omega/\tau)$ とすると $x < 1$ なので無限級数を加えることができるので

$$Z = \frac{1}{1-\exp(-\hbar\omega/\tau)} \qquad -(3)$$

系がエネルギー $s\hbar\omega$ をもつ状態 s にある確率 $P(s)$ は
ボルツマン因子 $P(\varepsilon_s) = \dfrac{\exp(-\varepsilon_s/\tau)}{Z}$ より

$$P(s) = \frac{\exp(-s\hbar\omega/\tau)}{Z} \quad -(4)$$

s の熱平均値は

$$\langle s \rangle = \sum_{s=0}^{\infty} sP(s) = Z^{-1}\sum s\exp(-s\hbar\omega/\tau) \quad -(5)$$

$y \equiv \hbar\omega/\tau$ とすると (5) の右辺は

$$\sum s\exp(-sy) = -\frac{d}{dy}\sum\exp(-sy)$$
$$= -\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{1-\exp(-y)}\right) = \frac{\exp(-y)}{[1-\exp(-y)]^2}$$

を用いて

(3)と(5)から

$$\langle s \rangle = \frac{\exp(-y)}{1-\exp(-y)}$$ が得られる。 これはすなわち、

$$\boxed{\langle s \rangle = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/\tau)-1}} \quad -(6)$$

プランク分布関数

2.5 プランクの法則とステファン－ボルツマンの法則

モードの熱平均エネルギーは

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle s \rangle \hbar\omega = \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/\tau)-1} \quad -(7)$$

高温の極限 $\tau \gg \hbar\omega$ の場合

$$\langle \varepsilon \rangle \simeq \tau \quad -(8)$$

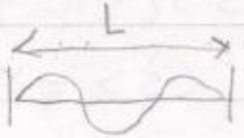
一辺の長さLの立方体の空洞の中に閉じこめられた輻射に対して次の形の1組のモードがある。

$$\begin{cases} E_x = E_{x0}\sin\omega t\cos(n_x\pi x/L)\sin(n_y\pi y/L)\sin(n_z\pi z/L) \\ E_y = E_{y0} \quad \text{〃} \quad \sin(\quad \text{〃} \quad)\cos(\quad \text{〃} \quad)\sin(\quad \text{〃} \quad) \\ E_z = E_{z0} \quad \text{〃} \quad \sin(\quad \text{〃} \quad)\sin(\quad \text{〃} \quad)\cos(\quad \text{〃} \quad) \end{cases}$$

$-(9)$

いま、

$$n \equiv (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2} \qquad -(10)$$



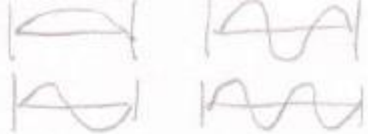
によってnを定義すれば角振動数は

$$\omega_n = n\pi c/L \qquad (c \cdots \text{光速}) \rightarrow ※ \qquad -(11)$$

となる。

$\rightarrow$ ※ $\omega_n = 2\pi\nu_n = n\pi c/L$

$$\nu_n = \frac{n}{2}\cdot\frac{c}{L}$$



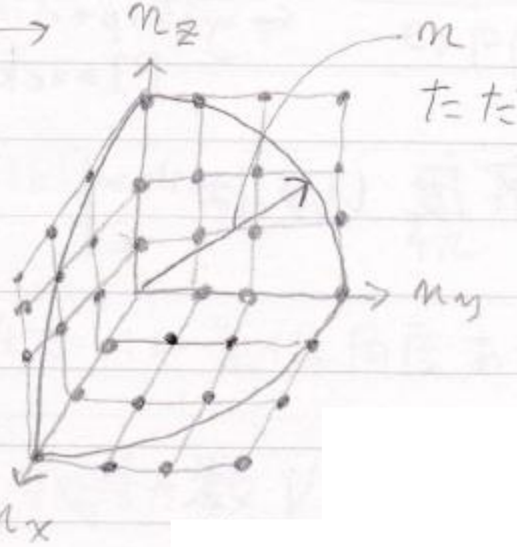
空洞内の全エネルギーは(7)より

$$U = \sum_n \langle \varepsilon_n \rangle = \sum_n \frac{\hbar \omega_n}{\exp(\hbar \omega_n/\tau) - 1} \quad \text{—(12)}$$

和を積分に置き換える. →＊

$$\sum_n (\cdots) = \frac{1}{8}\int_0^\infty 4\pi n^2 dn (\cdots) \quad \text{—(13)}$$

＊ →



ただし、$n = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2}$

電磁場には、2つの独立な偏りがあるので、積分に因子2を加える。

$$U = \pi \int_0^\infty dn\, n^2 \frac{\hbar \omega_n}{\exp(\hbar\omega_n/\tau) - 1}$$

$$= (\pi^2 \hbar c/L) \int_0^\infty dn\, n^3 \frac{1}{\exp(\hbar c n \pi / L\tau) - 1} \quad —(14)$$

ここで $x \equiv \pi \hbar c n / L\tau$ とおくと (14) は

$$U = (\pi^2 \hbar c/L)(\tau L/\pi \hbar c)^4 \underbrace{\int_0^\infty dx \frac{x^3}{\exp x - 1}}_{\frac{\pi^4}{15}\ \cdots\ \text{公式集}} \quad —(15)$$

体積 $V = L^3$ として
単位体積あたりのエネルギーは $\boxed{\dfrac{U}{V} = \dfrac{\pi^2}{15\hbar^3 c^3}\tau^4}$ —(16)

ステファン－ボルツマンの輻射法則

スペクトル密度 u_ω は、単位体積
単位角振動数領域あたりのエネルギーである。
(14)を ω に関して書き換えると

$$\frac{U}{V} = \int d\omega\, u_\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\int d\omega \frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/\tau)-1} \quad \text{— (17)}$$

それゆえ スペクトル密度は

$$\boxed{u_\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\cdot\frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/\tau)-1}} \quad \text{— (18)}$$

プランクの輻射則 → ※

空洞の壁に小孔をあける。小孔から流れ出る
エネルギーの流束密度 J_u は 単位~~面~~積の底面と
(光の速度×単位時間)の長さをもつ柱体に含まれる
エネルギーである。

$$J_u = [cU(\tau)/V]\times(\text{幾何因子}) \quad \text{— (19)}$$

(幾何因子は $\frac{1}{4}$) よって

$$J_u = \frac{cU(\tau)}{4V} = \frac{\pi^2\tau^4}{60\hbar^3c^2} = \sigma_B T^4 \quad (\sigma_B \equiv \pi^2 k_B^4/60\hbar^3c^2)$$

σ_B は ステファン－ボルツマン定数 — (20)

単位振動数νあたりのスペクトル密度u_νは (17)より

$$\frac{U}{V} = \int d\omega\, u_\omega = \int d\nu \frac{d\omega}{d\nu} u_\omega = \int d\nu\, u_\nu \quad \text{より} \quad u_\nu = \frac{d\omega}{d\nu} u_\omega$$

(18)のu_ωに$\omega = 2\pi\nu$、$\frac{d\omega}{d\nu} = 2\pi$を代入して

$$u_\nu = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \cdot 2\pi \cdot \frac{(2\pi\nu)^3}{\exp\left(\frac{\hbar}{\tau} \cdot 2\pi\nu\right) - 1} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{\tau}\right) - 1} \quad \text{— (21)}$$

単位波長λあたりのスペクトル密度u_λは 同じく(17)より

$$\frac{U}{V} = \int d\omega\, u_\omega = \int d\lambda \frac{d\omega}{d\lambda} u_\omega = \int d\lambda\, u_\lambda \quad \text{より} \quad u_\lambda = \frac{d\omega}{d\lambda} u_\omega$$

(18)に$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$、$\frac{d\omega}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}$を代入して ※↓

$$u_\lambda = \frac{8\pi h c}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\tau\lambda}\right) - 1} \quad \text{— (22)}$$

※ $\frac{d\omega}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}$ とマイナスがつくのに (22)にはないのはなぜか？

定積分を考えると $\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega\, u_\omega = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda\, u_\lambda$

$\omega_2 > \omega_1$ ならば $\lambda_2 < \lambda_1$ となる。 $\lambda_2 > \lambda_1$ とするならばマイナスがなくなる。

空洞にあけた小孔より流出する電磁波のエネルギー密度は
単位振動数νあたりの

全ての角度に対して輻射は等方向であるので、
単位角度あたり$\frac{1}{4\pi}$となる。 (※球の$S=4\pi r^2$)
小孔より流出する速度は光速cである。
よって

$$I(\nu,\tau)=\frac{c}{4\pi}u_\nu=\frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{\tau}\right)-1} \qquad \text{—(23)}$$

同じく 単位波長λあたりの流出するエネルギー密度は

$$I(\lambda,\tau)=\frac{c}{4\pi}u_\lambda=\frac{2hc^2}{\lambda^5}\cdot\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\tau\lambda}\right)-1} \qquad \text{—(24)}$$

2.5.　太陽放射と地球放射、温室効果

2.5.1. 黒体輻射とプランクの熱輻射公式

あらゆる物体はその温度に応じて光（輻射）と平衡状態を実現する。

温度 Tの物体と放射平衡にある電磁場（光）の単位波長(λ)幅、
単位空間体積当たりの放射エネルギー密度 $I(\lambda, T)$

$$I(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

h … プランク定数 (6.63×10^{-34} J s)
c … 光速 (3.00×10^{8} m/s)
k … ボルツマン定数 (1.38×10^{-23} J/K)

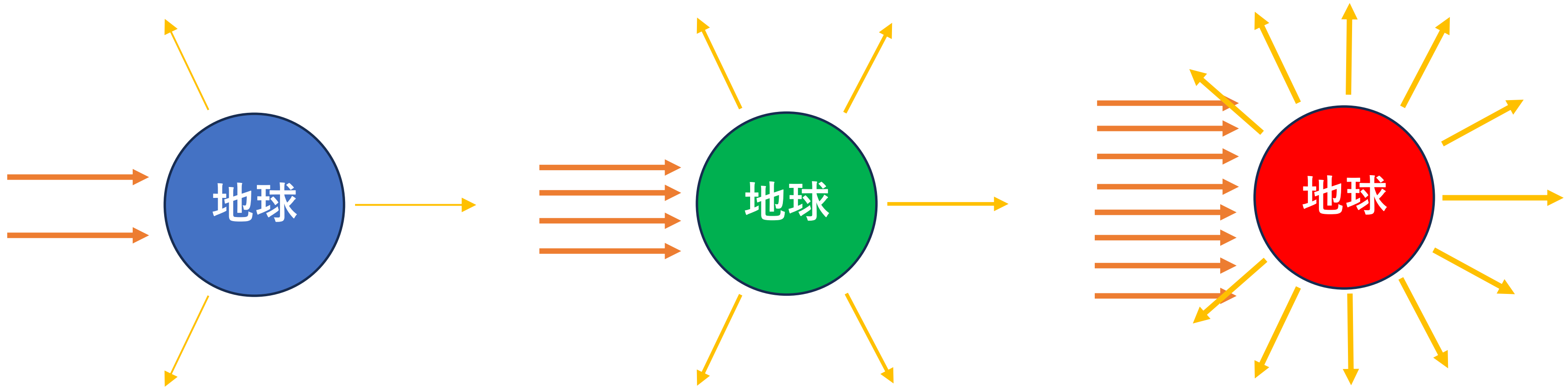
2.5.2. シュテファン・ボルツマンの法則

物体の単位面積が単位時間に放出するエネルギー流量 S(W/m^2)は絶対温度 Tの 4 乗に比例する。

$$S \propto T^4 \Rightarrow S = \sigma T^4$$

比例定数σをシュテファン・ボルツマン定数という。

一定の輻射を受けている物体はどんどん暖まって温度が上昇し、
それに伴って放射するエネルギーも増えていく。
入射するエネルギーと同じだけのエネルギーを放射する温度になったとき釣り合う。
受け取る放射のエネルギーに応じてつり合う温度が決まってくる。



$T_1 < T_2 < T_3$

釣り合い状態では、受け取るエネルギーと放射するエネルギーは等しい。

2.5.3. ウィーンの変位則

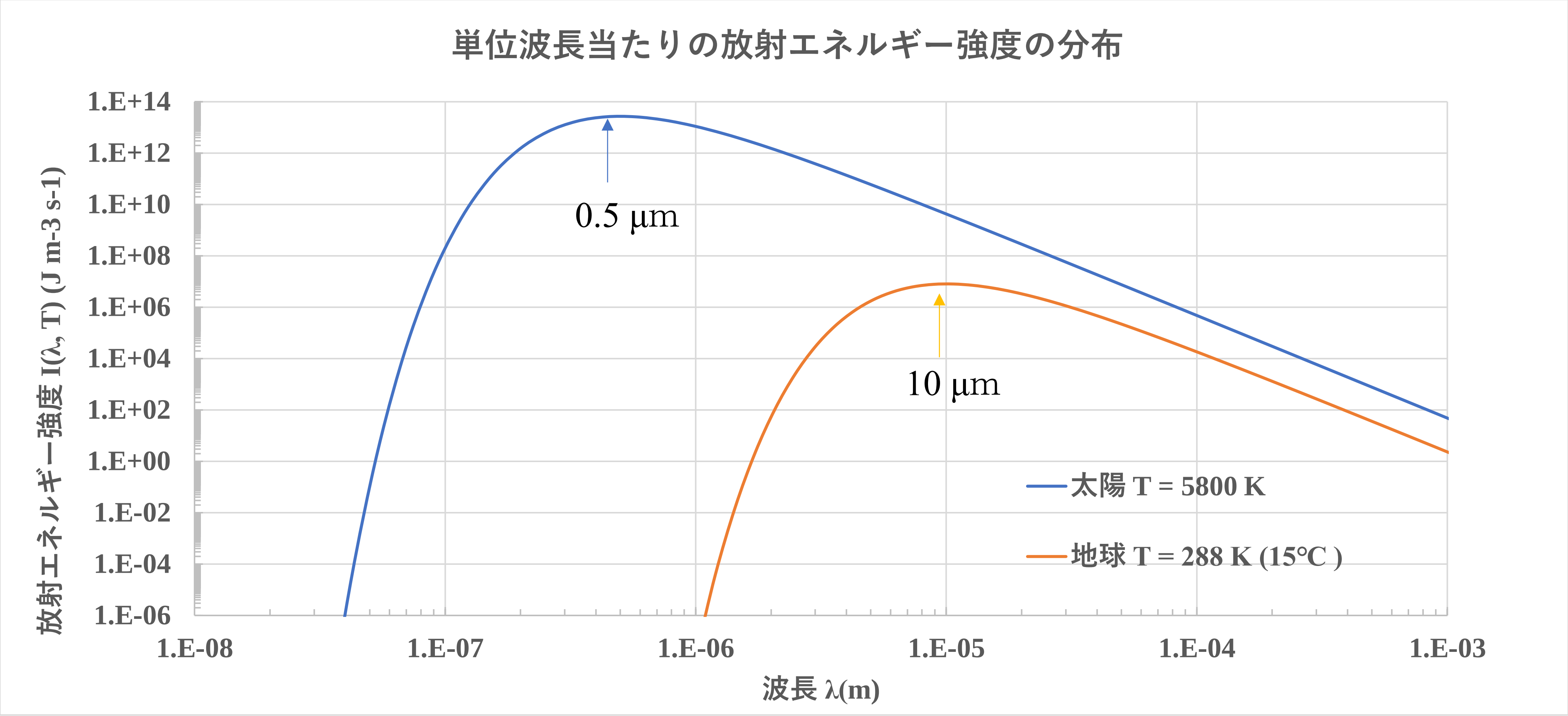
放射のエネルギー密度が最大になる波長λ_{max}は絶対温度Tに反比例し

$$\lambda_{max} \propto \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{max} = b\frac{1}{T}$$

という式で表わされる。

以上のことから、
高温の物体は、短い波長の光を、大きな強度で放射している。
低温の物体は、長い波長の光を、それなりの強度で放射している。

太陽(T = 5800 K)が放射する光は λ_{max} = 0.5 μm の可視光であり、
地球(平均温度 T = 288 K(15℃))が放射する光は λ_{max} =10 μm の赤外線である。
つまり地球表面は可視光で温められ、赤外線を放出して冷える。



2.5.4. 地球大気の組成と赤外線の吸収

地球大気は可視光を吸収しない。

地球大気の大部分を占める酸素O_2や窒素N_2は赤外線を吸収しない。

大気中に僅かに含まれる水蒸気H_2Oと二酸化炭素CO_2は、赤外線を吸収する。

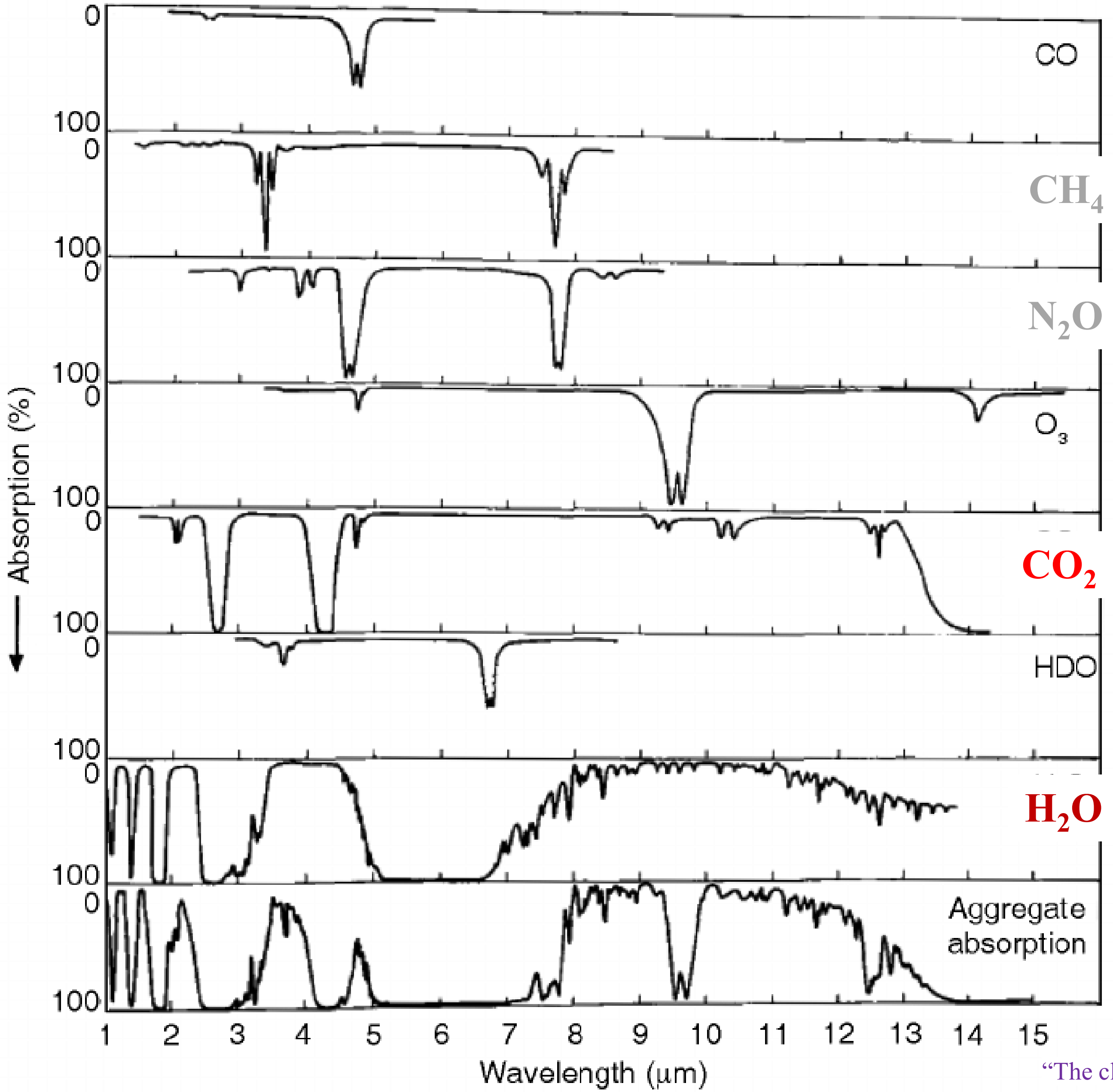
大気中にごく微量で存在するメタンCH_4や一酸化二窒素N_2O等の分子も
赤外線を吸収する。

地球大気の組成

成分	分子式	容積比(%)
窒素	N_2	78.11
酸素	O_2	20.96
アルゴン	Ar	0.9343
二酸化炭素	CO_2	0.033
メタン	CH_4	1.52×10^{-4}
一酸化二窒素	N_2O	5×10^{-5}
水蒸気	H_2O	不定

環境省/大気の組成

https://www.env.go.jp/earth/coop/coop/materials/02-apctmj1/02-apctmj1-011.pdf



地球大気に含まれる
気体分子の
赤外吸収スペクトル

"The climate system", M. Brunetti, F. Prodi, EPJ Web of Conferences **98**, 02001(2015).

大気中にごく微量しか存在しないH_2O, CO_2, CH_4, N_2O等の気体分子が、
赤外線の地球放射の大部分を吸収する。

気体分子によって吸収された地球放射のエネルギーは、
分子どうしの衝突によって大気全体に拡散し、大気全体の温度が上昇する。

大気はその温度に応じて、宇宙空間と地球表面の双方向へ
赤外線を放射する。

大気放射を吸収して地球表面は再び温められ温度が上昇する。

地球放射が再び大気に吸収され大気を温める。

大気は再び双方向へ赤外線を放射する。

この繰り返しで地球と大気が互いに温めあう。

これが温室効果である。

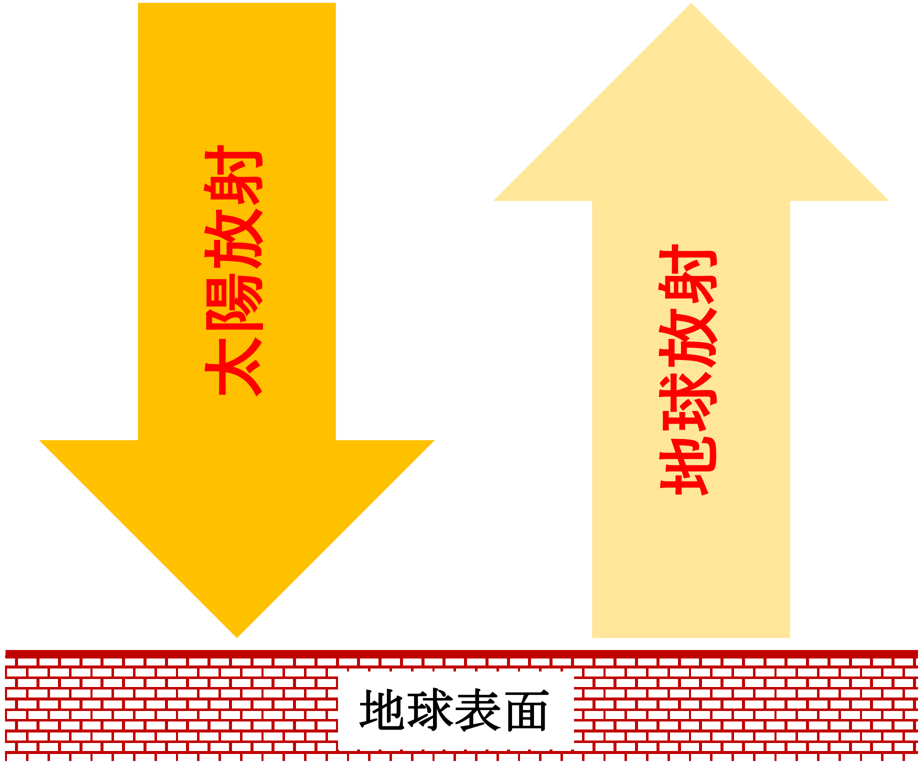
温室効果と呼ばれる理由は、温室のガラスが大気と同じ働きをして、
これと同じメカニズムで温室内の温度を上昇させるからである。

温室効果のために現在の地球の平均温度は+15℃で輻射平衡になっている。

もしも仮に、地球大気中にH_2O, CO_2, CH_4, N_2O等の気体分子がなく、
大気が赤外線に対して透明だったならば、
地球の平均温度は-40℃で輻射平衡になると予想される。

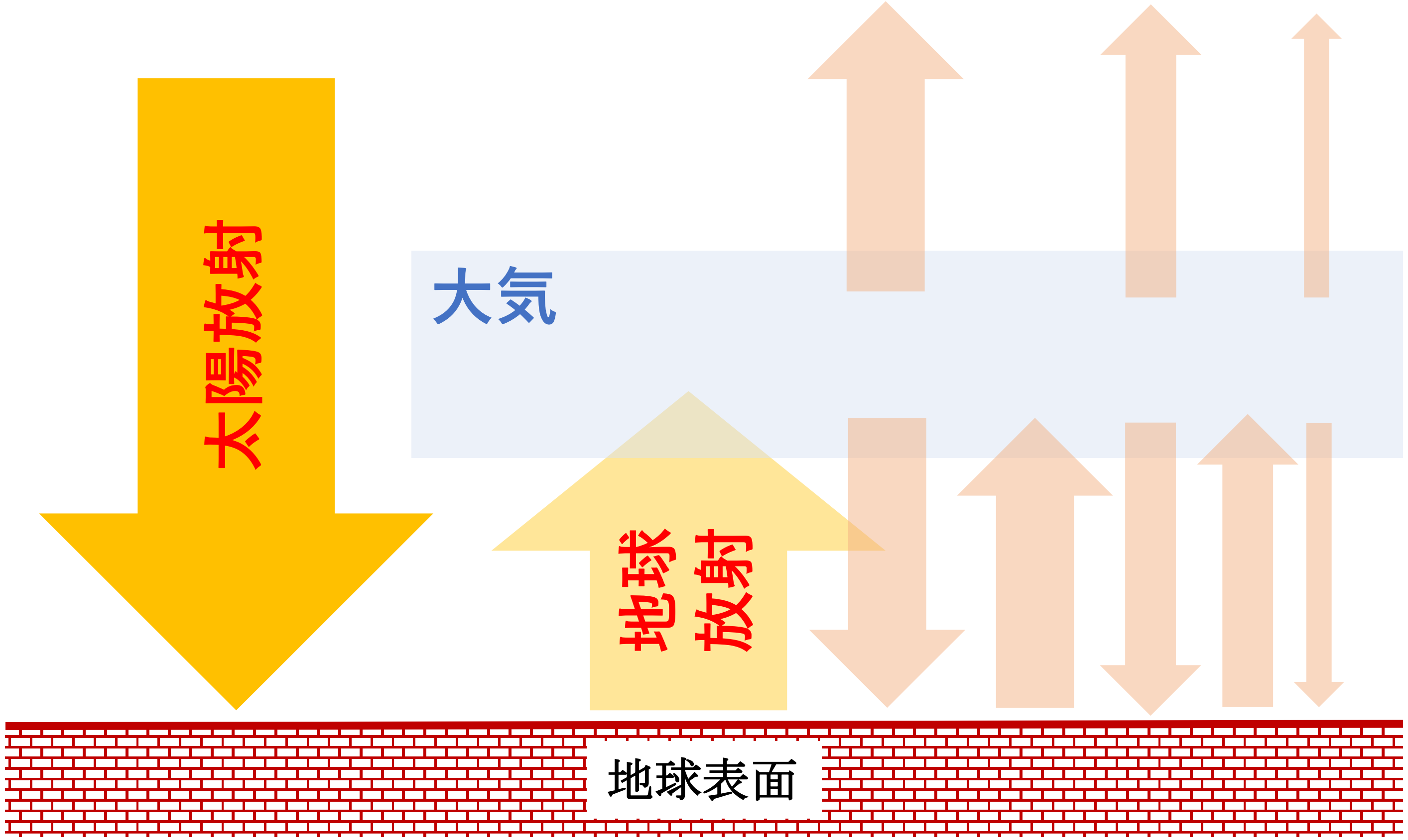
近年、人間の産業活動によるCO_2, CH_4, N_2O等の大気中での増加によって、
地球温暖化が急激に進行していると考えられている。

地球大気中に水蒸気や
二酸化炭素がない場合



地球表面の平衡温度 -40°C

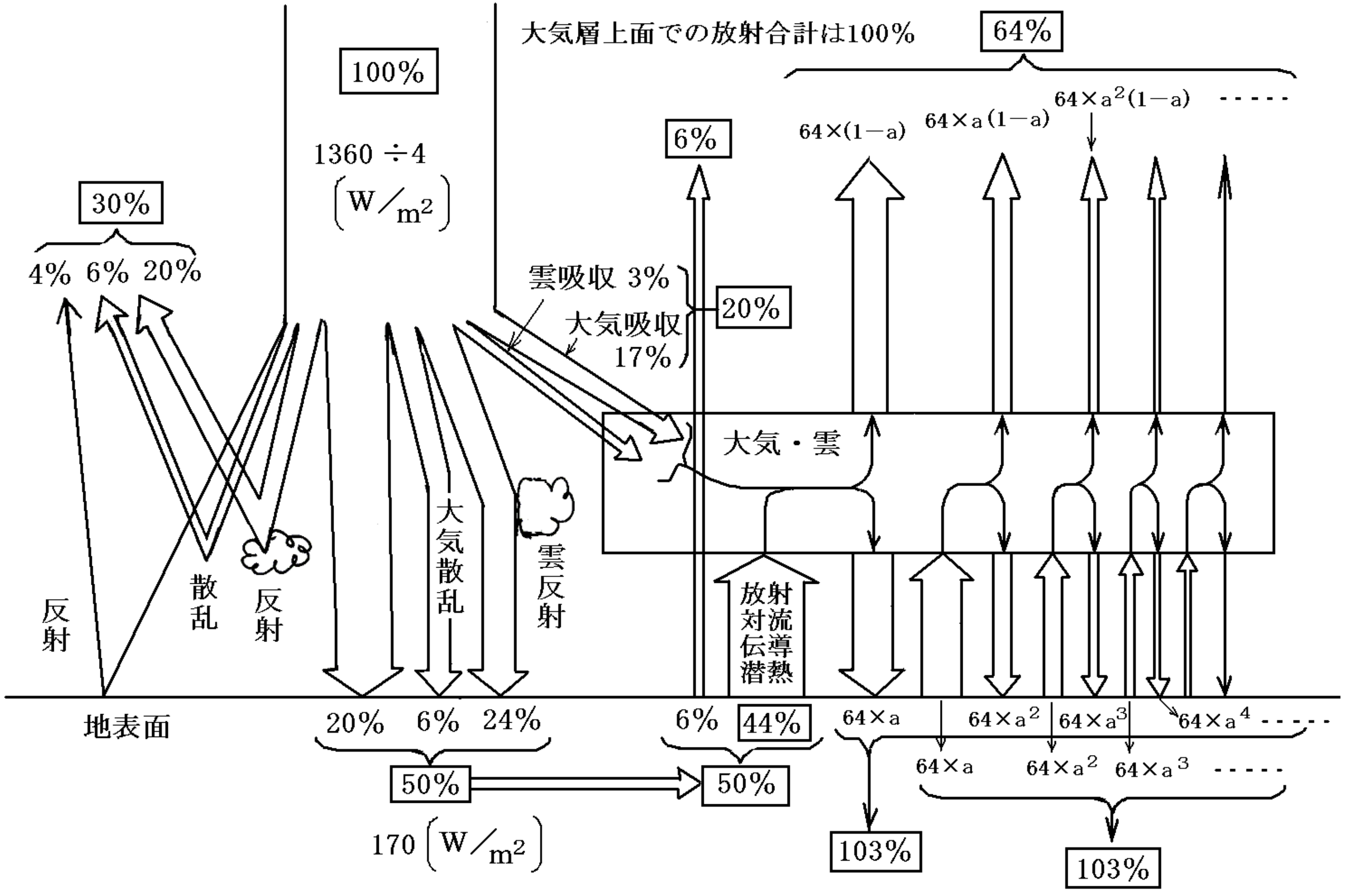
地球大気中に水蒸気や
二酸化炭素がある場合



地球表面の平衡温度 +15°C

2.5.5. 地球のエネルギー収支

地球に入射したエネルギーは結局、最後にはすべて宇宙空間に逃げていく。地球大気圏上層に届く太陽光の内の50%が地表に届く。それが地表を暖める。暖まった地球は赤外線を放射する。そのうち6%が大気を透過してそのまま宇宙空間へ逃げ去る。残りの44%分と、太陽光が直接大気を暖める部分(20%)の合計64%が大気を加熱する。暖まった大気もまた、その温度に応じた赤外線を放射する。それは地表面に向かうものと宇宙に逃げるものになるが、地球に向かう成分は、地球を再び暖める。そしてさらに暖められた地球は赤外線を放射し、それは大気に吸収される。以下同様のフィードバック機構が等比級数的に働く。大気の厚さを何層にも分割して考えると、各層において同様な平衡関係が成り立っている。温室効果ガス濃度が増えれば、より下層の部分で赤外線が吸収しつくされてしまう。そうなると大気から地表面に帰る割合が増大するであろう。そのために温室効果ガスの僅かな変動は輻射の地表への帰還率を大きく変動させる。



参考書

1. キッテル　熱物理学　第2版　山下次郎、 福地充　訳　丸善株式会社　第4章.
2. 量子力学　朝永振一郎　著　みすず書房　第1章.
3. 物理学とは何だろうか（上）（下）　朝永振一郎　著　岩波新書.
4. 振動分光学（日本分光学会測定法シリーズ16）中川一朗　著　学会出版センター　第2, 3章.